Arbeitspapiere des Sonderforschungsbereichs 340
"Sprachtheoretische Grundlagen der Computerlinguistik"
Bericht Nr. 111, Juni 1997

ZUR BEREICHSTHEORETISCHEN SEMANTIK VON GRAMMATIKFORMALISMEN

UWE MÖNNICH

Universität Stuttgart • Universität Tübingen
IBM Deutschland

ISSN 0947-6954/97

VORWORT

Gegenstand der folgenden Überlegungen ist die Semantik syntaktischer Objekte. Im Vordergrund steht in beiden Teilen die deklarative Variante dieser Semantik, da sie besonders geeignet erscheint, verschiedene Resultate der formalen Sprachtheorie unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt zusammenzufassen.

Die beiden Konkretisierungen deklarativer Semantik, die für das Beispiel der kontext-freien Grammatiken eine Rolle gespielt haben, die Fixpunkte von Gleichungssystemen und die elementaren Modellklassen logischer Formeln, entbehren jeden Bezugs auf berechnungstheoretisch motivierte Strukturen. Die vorgelegten bereichstheoretischen Interpretationen versuchen hier, eine Lücke zu schließen. Es ist vielleicht nicht überflüssig, darauf zu verweisen, daß zumindest unter der kategorientheoretischen Perspektive der Universalität das Prinzipien- und Parametermodell seine Deutung dieselbe Unausweichlichkeit beanspruchen kann, wie dies für merkmalsbasierte Ansätze der Fall ist.

U.M.

ZUR DEKLARATIVEN REPRÄSENTATION
GRAMMATISCHER DATENSTRUKTUREN

1. Einleitung

Die Theorie der Semantik von Grammatikformalismen ist durch eine Dichothomie gekennzeichnet, die ihren Ausdruck u.a. in folgenden Begriffspaaren findet:

denotational	/	operational
deklarativ	/	prozedural
logisch	/	computational

Die operationale Semantik ist durch einen stufenweisen effektiven Prozeß beschrieben, der, ausgehend von einem syntaktischen Objekt, seine Bedeutung generiert. Die deklarative Semantik ist definiert durch die Interpretation des syntaktischen Objekts als eines Systems von Gleichungen, dessen Lösung in einem geeigneten Bedeutungsraum gesucht wird. Im idealen Fall sind beide Arten von Semantik äquivalent, d.h. die Resultate des stufenweisen Prozesses sind identisch mit der Lösungsmenge. Das klassische Beispiel für diese Äquivalenz ist die duale Charakterisierung der kontextfreien Sprachen einmal als Herleitungsverfahren auf der Basis der Produktionsregeln und einmal als Fixpunkt eines Systems von Gleichungen in einer Halbgruppe. Ideale Verhältnisse, die den Beweis solcher Zusammenhänge gestatten, sind jedoch eher die Ausnahme, und die Aufgabe der deklarativen Semantik besteht darin, eine stabile Grundlage für die Deutung von Formalismen zu liefern, mit denen man bis dahin geleitet von einem intuitiven Verständnis eher sorglos umgegangen ist. Die Literatur enthält eine Fülle von Beispielen, in denen die Konsequenzen dieses unheilvollen Zustands beschrieben wird. So haben einfache Modifikationen in der Implementation des ATN Formalismus zu einer weitreichenden und unerwarteten Reinterpretation der in diesem Rahmen entwickelten Grammatiken geführt. Die mathematische Beschreibung des denotationellen Bereichs von Merkmalsstrukturen hat die Existenz einer Operation der Merkmalsgeneralisierung aufgedeckt, die die Möglichkeit der Analyse von Koordinationsphänomenen eröffnet. Schließlich hat die denotationelle Interpretation des ALEP Formalismus ein technisches Problem bei der Behandlung der Subtypen enthüllt.

In den folgenden Bemerkungen wird gezeigt, daß die deklarative Interpretation der Merkmalsstrukturen in einem situationstheoretischen Rahmen präsentiert werden kann. Wir bauen auf auf der bekannten informationstheoretischen Deutung der Merkmalsstrukturen und zeigen, daß sie als die syntaktische Seite eines situationstheoretisch motivierten Klassifikationsbereichs angesehen werden kann. Vor dem Hintergrund dieser Interpretation ergibt sich ein überraschend einfacher Vollständigkeitsbeweis für die Beschreibung von Merkmalsstrukturen durch Pfadgleichungen und eine eine Reduktion einer spezifischen Form von Informationsübertragung im Sinne von Dretske auf den Begriff einer Scott-stetigen Funktion.

Der situationstheoretische Ansatz zur deklarativen Deutung dient als Illustration des Potentials, das in einer Kombination semantischer und konstruktiver, i.e. informationstheoretischer, Methoden für die präzise Spezifikation grammatischer Datenstrukturen verborgen ist. Es besteht begründete Hoffnung, daß analoge Resultate auch für die Strukturen erreichbar sind, die im Prinzipien- und Parametermodell verwandt werden. Eine verbindliche deklarative Interpretation würde dann auch für diese Strukturen Korrektheit, Universalität der Interpretation und Effizienz der Implementation in dem Maße vorbereiten, wie dies schon für andere, berechnungstheoretisch besser untersuchte Ansätze geschehen ist. Für den Teil des PP-Modells, der im Rahmen der schwachen monadischen Logik 2. Stufe mit mehreren Nachfolgerfunktionen formalisierbar ist, enthält Teil II den Nachweis der Universalität einer bereichstheoretischen Deutung.

2. Klassifikationsbereiche

Jede Theorie des Informationsgehalts muß unterscheiden zwischen der *Information* und *Quelle/Träger/Ort ... der Information.* Eine Klassifikation ist eine Zusammenfassung einzelner Dinge (Quellen, ...) nach dem Gesichtspunkt verschiedener Informationstypen.

Definition 1 (Seligman). Ein *Klassifikationsbereich* (KB) ist eine Struktur $\mathsf{S} = \langle \mathsf{S}, \models, \mathsf{T}\rangle$, wobei S eine Menge (die Menge der Informationsträger oder *Informationssituierungen*), T eine von S disjunkte Menge (die Menge der *Typen*) und $\models$ eine Untermenge von $\mathsf{S} \times \mathsf{T}$ ist.

Wenn $s \in S$ und $A \in T$ in der Relation $\models$ stehen, d.h. $s \models A$ gilt, sagen wir, daß s vom Typ A (modulo S) ist.

Beispiele.

1. *(Situationstheorie)*

$$s \models p$$

s gehört zu dem Typ der Situationen, die durch das Infon p partiell gekennzeichnet sind.

2. *(Wahrheit in einem Modell)* In diesem KB werden die Typen von Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe und die Situierungen von Modellen dieser Sprache gebildet (TARSKI):

$$\mathcal{M} \models \phi$$

Bemerkung. Zusammenspiel von Syntax und Semantik wird bei der Analyse der Beschreibung von Merkmalsstrukturen und deren Denotation eine Rolle spielen.

3. *(Topologische Räume)* Ein Topologischer Raum $X = (X, O)$ kann nach VICKERS als KB aufgefaßt werden, wobei X die Menge der Situierungen, O die Menge der Typen ist, und die Elementrelation $x \in O$ die Klassifikationsbeziehung bildet, d.h. $x \models O$ gdw. $x \in O$.

4. *(Merkmalsstrukturen)* Merkmalsstrukturen und ihre informationstheoretischen Beschreibungen lassen sich als ein Klassifikationsbereich auffassen, wobei—wie weiter unten einsichtlich wird—die klassische Dualität von Syntax und Semantik aus dem TARSKIschen Beispiel sich auch auf diesen Fall überträgt.

Notation (Ergänzende Konventionen). Sei $S = (S, \vdash, T)$ ein Klassifikationsbereich, dann wird mit

$$Sit(A) = \{s \in S : s \models A\}$$

die Menge der Informationsträger vom Typ A bezeichnet.
Für eine Menge $T_0 \subseteq T$ von Typen schreiben wir:

$$Sit(T_0) = \bigcap_{A \in T_0} Sit(A)$$

3. Informationsstrukturen

Scotts Bereichstheorie liefert die mathematischen Voraussetzungen für eine denotationelle Semantik von Programmiersprachen. Nachdem diese Theorie zunächst auf der Grundlage algebraischer und topologischer Begriffe dargestellt worden war, haben spätere Entwicklungen gezeigt, daß sie auch mithilfe beweistheoretischer Mittel beschrieben werden kann.

Informationssysteme, in die wesentlich die Folgerungsbeziehung eingeht, stellen eine solche beweistheoretisch orientierte logische Repräsentation von Bereichen dar.

Definition 2. Ein *Informationssystem* ist ein Tripel $\mathrm{D} = (\mathrm{D}, Con, \vdash)$, wobei D eine Menge, *Con* eine nicht-leere Untermenge von $\mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathrm{D})$ und $\vdash$ eine Untermenge von $Con \times \mathrm{D}$ ist, und folgende Bedingungen erfüllt sind:

i. $u \subseteq v \in Con \;\Rightarrow\; u \in Con$

ii. $d \in \mathrm{D} \;\Rightarrow\; \{d\} \in Con$

iii. $u \vdash d \;\Rightarrow\; u \cup \{d\} \in Con$

iv. $u \in Con$ und $d \in u \;\Rightarrow\; u \vdash d$

v. $(\forall d \in v)(u \vdash d)$ und $v \vdash b \;\Rightarrow\; u \vdash b$

Bemerkung. Die Menge D wird aufgefaßt als eine Menge von *Propositionen*, die Informationen über die Elemente des Bereichs enthalten, der von dem Informationssystem D repräsentiert wird. *Con* ist die Familie endlicher *konsistenter* Mengen von Propositionen, die ein und demselben Element zugesprochen werden können. Die Idee hinter der *Folgerungsbeziehung* $\vdash$ kann intuitiv so beschrieben werden, daß ein Paar (u, d) aus $Con \times \mathrm{D}$ nur dann in der Relation $u \vdash d$ steckt, wenn die in u zusammengefaßte Information mindestens so spezifisch ist wie die in d enthaltene.

Notation. Die Folgerungsbeziehung kann zu einer Relation auf *Con* durch die folgende Festlegung erweitert werden:

$$u \vdash v \text{ gdw. } (\forall d \in v) u \vdash d$$

Beispiele.

1. *(Flache Informationssysteme)* Das flache Informationssystem, das wir durch eine beliebige Menge S erhalten, ist definiert als $Flach(S) = (S, Con, \vdash)$, wobei $Con = \{\emptyset\} \cup \{\{d\} : d \in S\}$ und $u \vdash d$ gdw. $u = \{d\}$.

2. *(Partielle Funktionen)* Wenn A und B beliebige Mengen sind, dann ist das Informationssystem der partiellen Funktionen von A nach B eine Struktur $A \rightharpoondown B = (D, Con, \vdash)$, wobei $D = A \times B$ und $\{(a_0, b_0), \ldots, (a_{k-1}, b_{k-1})\} \in Con$ gdw. für alle $i, j < k$ gilt $a_i = a_j \Rightarrow b_i = b_j$, während d aus u folgt, d.h. $u \vdash d$, falls $d \in u$.

3. *(Merkmalstrukturen)* Sei L eine Menge von Merkmalsnamen und S ein davon disjunkter Bereich von Sortennamen. Dann läßt sich nach Pereira & Shieber das Informationssystem der Merkmalsstrukturen $FS = (D, Con, \vdash)$ durch folgende Stipulationen definieren:

Die Propositionen $D = \{x = y : x \in L^*, y \in L^* \cup S\}$ werden von der Menge der Pfadgleichungen gebildet. *Con* und $\vdash$ lassen sich am einfachsten über die deduktiven Abschlüsse endlicher Untermengen von D definieren, wobei der deduktive Abschluß $\bar{u}$ der endlichen Menge $u \subseteq D$ als die kleinste Untermenge von D definiert ist, die u enthält und die folgenden Bedingungen erfüllt:

Definiertheit der Wurzel: $e = e \in \bar{u}$
Symmetrie: $x = y \in \bar{u} \Rightarrow y = x \in \bar{u}$
Transitivität: $x = y, y = z \in \bar{u} \Rightarrow x = z \in \bar{u}$
Präfix-Abgeschlossenheit: $xw = y \in \bar{u} \Rightarrow x = x \in \bar{u}$
Kongruenz: $xw = y, x = z \in \bar{u} \Rightarrow zw = y \in \bar{u}$

Eine endliche Menge von Gleichungen u ist in *Con*, wenn die Zuordnung von Sorten funktional ist, d.h. wenn für alle $s \neq s' (\in S)$ gilt, daß entweder $w = s \notin \bar{u}$ oder $w = s' \notin \bar{u}$. Die Folgerungsrelation ist wie folgt definiert:

$$u \vdash d \text{ gdw. } d \in \bar{u}$$

Generell kann in jedem Informationssystem D der Abschluß einer beliebigen Menge von Propositionen $u \subseteq D$ hinsichtlich der Folgerungsrelation $\vdash$ gebildet werden:

$$\bar{u} =_{def} \{d \in D : (\exists v \subseteq u) v \vdash d\}$$

Wenn eine solche abgeschlossene Menge auch noch konsistent ist in dem Sinn, daß alle ihre endlichen Untermengen Elemente von *Con* sind, haben wir es mit einem (idealen) Element zu tun.

Definition 3. Ein *Element* x in einem Informationssystem D (notiert als $x \in |D|$) ist eine Menge von Propositionen, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

i. $u \subset_{\mathrm{endl}} x \;\Rightarrow\; u \in \mathit{Con}$

ii. $u \subset_{\mathrm{endl}} x$ und $u \vdash d \;\Rightarrow\; d \in x$

THEOREM 1 (Pereira & Shieber; Moshier). *Merkmalsstrukturen entsprechen in eindeutiger Weise den Elementen von Informationssystemen.*

$$\begin{bmatrix} \text{sent} & \\ \text{SUBJ:} & \begin{bmatrix} \text{noun} & \\ \text{AGR:} & \begin{bmatrix} \boxed{4}\ \text{syn} \\ \text{PERSON: } [\,\text{3rd}\,] \\ \text{NUMBER: } [\,\text{singular}\,] \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ \text{PRED:} & \begin{bmatrix} \text{verb} & \\ \text{AGR:} & [\,\boxed{4}\,] \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{e} = \mathrm{e}$$

$$\mathrm{e} = \text{sent}$$

$$\text{SUBJ.AGR.PERSON} = \text{3rd}$$

$$\text{PRED.AGR} = \text{SUBJ.AGR}$$

4. *(Syntaktische Kodierung)* Relationen auf syntaktischen Bäumen und grammatische Prinzipien lassen sich mithilfe von Axiomen in einer Orientierungssprache spezifizieren. Diese Sprache verfügt neben BOOLEschen Variablen und Konstanten über eine Familie von von Modaloperatoren, die lokale Dominanz- und Präzedenzverhältnisse in Bäumen kodieren. KRACHT hat nachgewiesen, daß sich entsprechende axiomatische Spezifikationen in Gleichungssysteme kontextfreier Baumgrammatiken übersetzen lassen.

Die Methoden in Teil II machen keinen Gebrauch von den besonderen Eigenschaften der dort zugrunde gelegten Spezifikationssprache für syntaktische Bäume, der schwachen monadischen Logik 2. Stufe mit mehreren Nachfolgerfunktionen. Sie liefern daher auch für die modale Orientierungssprache einen sog. SCOTT-ERSHOV Bereich, bzw. ein dazu äquivalentes Informationssystem.

4. FOLGERUNG

In diesem Abschnitt wird der angekündigte Bezug zwischen den situationstheoretischen Klassifikationssystemen und den bereichstheoretischen Informationssystemen hergestellt und die Verbindung zwischen syntaktischer Herleitung und semantischer Folgerung diskutiert.

Korrektheit und Vollständigkeit der Prädikatenlogik, übertragen in die Terminologie der Klassifikationssysteme, besagen, daß die Formel ψ aus der Formel ϕ herleitbar ist ($\phi \vdash \psi$) gdw. aus der Tatsache, daß $\mathcal{M}$ vom Typ ϕ ist, folgt, daß $\mathcal{M}$ auch vom Typ ψ ist:

$$\mathcal{M} \models \phi \;\Rightarrow\; \mathcal{M} \models \psi$$

Ein analoges Resultat gilt für die (metasprachliche) Beschreibung von Merkmalstrukturen durch konsistente Mengen von Pfadgleichungen und ihre Denotationen als Elemente der von den zugrundeliegenden Informationssystemen repräsentierten SCOTTschen Bereichen.

Definition 4 (Barwise). Ein *Informations-Extraktionssystem* (information containment system) $C = (S, S', \Rightarrow)$ ist ein Paar von Klassifikationsbereichen $S = (S, \models, T)$ und $S' = (S, \models', T')$, die denselben Informationsträger unter verschiedenen Perspektiven betrachten, deren Typenmengen T, T' durch eine *Indizierungsrelation* $\Rightarrow \subseteq T \times T'$ verknüpft sind, und für die die folgende *Korrektheitsbedingung* erfüllt ist:

$$\text{Wenn } A \Rightarrow B \text{ und } s \models A, \text{ dann } s \models' B.$$

Beispiele.

1. *(Logische Folgerung)* Im Fall des motivierenden Beispiels der logischen Folgerung wird ein und derselbe Klassifikationsbereich auf sich selbst bezogen und die Indizierungsrelation mit dem syntaktischen Begriff der Herleitung identifiziert. Die Korrektheitsbedingung entspricht dann der üblichen logischen Korrektheit:

$$\text{Wenn } \phi \vdash \psi, \mathcal{M} \models \phi, \text{ dann } \mathcal{M} \models \psi.$$

2. *(Photographien)* Szenen lassen sich klassifizieren mithilfe der Bilder, die sie auf einen Film projizieren. Ein Farbphoto "impliziert" ein Schwarzweiß-Photo derselben Szene. Die Klassifikation einer Szene durch ein Farbphoto involviert notwendigerweise die informationsärmere Klassifikation durch ein Schwarzweiß-Photo.

Die übliche semantische Definition der logischen Folgerung kann auf den allgemeinen Fall nicht übertragen werden, da die Typen einer beliebigen Klassifikation weder eine syntaktische Struktur aufweisen, noch irgendwelche Wahrheitsbedingungen haben, wie das Beispiel der Photographien deutlich macht.

3. *(Merkmalsstrukturen)* Zu Beginn eine Definition eines Klassifikationsbereichs $\mathsf{KB}(\mathsf{D}) = (|\mathsf{D}|, \models, \mathsf{T})$, der von einem Informationssystem $\mathsf{D} = (\mathsf{D}, \mathit{Con}, \vdash)$ determiniert und in dem $|\mathsf{D}|$ als die Menge der Elemente des durch D repräsentierten Scott-Bereichs, $\models$ als die Untermengenrelation und T als die Familie der endlichen konsistenten Mengen *Con* definiert ist:

$$x \models u \text{ gdw. } u \subseteq x$$

Zusammen mit der erweiterten Folgerungsrelation in der Rolle der Indizierungsrelation bildet jeder informationstheoretisch determinierte Klassifikationsbereich ein *Informations-Extraktionssystem.* Die Korrektheitsbedingung ergibt sich automatisch aus den Definitionen:

$$\begin{tikzcd} u & \vdash & v \\ & x \arrow[ul, phantom, sloped, "\models"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\models"] & \end{tikzcd}$$

Aus $u \subseteq x$ folgt unmittelbar, daß $v \subseteq x$, da x gegenüber $\vdash$ abgeschlossen ist.

Wird in naheliegender Weise die semantische Folgerung zwischen zwei Mengen von Typen T_0 und T_1 in einem Klassifikationsbereich $\mathsf{S} = (\mathsf{S}, \models, \mathsf{T})$ durch die Inklusion der charakterisierten Trägermengen definiert:

$$\mathit{Sit}(\mathsf{T}_0) \subseteq \mathit{Sit}(\mathsf{T}_1)$$

so gilt für die informationstheoretischen Klassifikationsbereiche auch die Umkehrung der Korrektheitsbedingung.

Theorem 2 (Vollständigkeit). *Sei* $\mathsf{D} = (\mathsf{D}, \mathrm{Con}, \vdash)$ *ein Informationssystem und* $\mathsf{KB}(\mathsf{D}) = (|\mathsf{D}|, \subseteq, \mathrm{Con})$ *der durch* D *determinierte Klassifikationsbereich. Dann läßt sich jede Instanz einer semantischen Folgerungsbeziehung zwischen endlichen konsistenten Mengen* u *und* v *auch herleiten:*

$$\textit{Wenn } \mathrm{Sit}(u) \subseteq \mathrm{Sit}(v), \ \textit{dann } u \vdash v.$$

Beweisskizze. Da der Abschluß von $u \in \mathit{Con}$ ein Element von D ist, folgt aus der Voraussetzung $\mathit{Sit}(u) \subseteq \mathit{Sit}(v)$, daß $\bar{u} \in \mathit{Sit}(v)$, d.h. $\bar{v} \subseteq \bar{u}$, woraus wegen der Transitivität von $\vdash$ sich unmittelbar $u \vdash v$ ergibt. $\square$

Informationstheoretische Beschreibungen und die durch sie charakterisierten Informationssituierungen bilden somit im Spezialfall der Merkmalsstrukturen die Grundlage für eine exakte *Korrespondenz* zwischen ihrer repräsentationellen Komponente und ihrer denotationellen Verankerung. Informationen, die sich aus einer (konsistenten) Menge von Pfadgleichungen extrahieren lassen, spiegeln sich in der Beziehung der durch sie beschriebenen Strukturen wieder (*Korrektheit*). Wenn auf der anderen Seite eine der elementaren Familien von Strukturen, die durch zwei endliche Beschreibungen syntaktisch charakterisiert sind, eine Untermenge der anderen ist, dann kann die eine Beschreibung aus der anderen mithilfe des zugrundeliegenden Ableitungskalküls gewonnen werden. Für die Merkmalsstrukturen ist somit auf der Grundlage des situationstheoretischen Begriffs des Klassifikationsbereichs nachgewiesen, da"s ihre bereichstheoretische Spezifikation alle Eigenschaften einer nichtoperationellen, deklarativen Semantik aufweist.

5. Informationsfluss

Die Entwicklung der Situationstheorie ist wesentlich von dem Versuch bestimmt, eine Erklärung dafür zu liefern, daß eine Situation Träger von Informationen über eine andere Situation sein kann. Ursprünglich wurde dieser Informationsfluß nur auf der Ebene der Typen mithilfe des Begriffs der *constraints* erfasst. Das Konzept derb Klassifikationsbereiche erlaubt es, die Übertragung von Information zwischen ihnen gleichzeitig auf der Ebene der Träger und auf der Ebene der Typen zu betrachten und durch die Einführung geeigneter Kompatibilitätsbedingungen eine besondere Klasse von informationsvermittelnden Morphismen zwischen Klassifikationsbereichen auszuzeichnen.

Beispiel. (Rauch und Feuer) Starke Rauchentwicklung ist normalerweise ein Zeichen für Feuer. Wenn man eine starke Rauchentwicklung beobachtet, ist es naheliegend, der beobachteten Situation den Typ *Rauch* zuzuordnen. Man kann daraus schließen, daß es in der Nähe eine Situation vom Typ *Feuer* gibt, die durch die beobachtete Situation signalisiert wird.

Dieses und ähnliche Beispiele (cf. Temperatur und Höhe der Quecksilbersäule) legt folgende Definition nahe:

Definition 5. Seien $\mathcal{S} = (S, \models, T)$ und $\mathcal{S}' = (S', \models', T')$ zwei Klassifikationsbereiche und $C = (\mapsto, \Rightarrow)$ ein Paar, bestehend aus einer Indizierungsrelation zwischen T und T' ($\Rightarrow$) und einer Signal(isierungs)relation zwischen S und S' ($\mapsto$).

Das Paar von Relationen $C = (\mapsto, \Rightarrow)$ wird *Informationsverknüpfung* (information link) genannt, wenn folgende Korrektheitsbedingung erfüllt ist:

Wenn A' von A indiziert wird und s von Typ A ist, dann ist s' vom Typ A', falls s' von s signalisiert wird.

$$
\begin{array}{ccc}
\textit{Rauch} & \Rightarrow & \textit{Feuer} \\
\rotatebox{90}{$\models$} & & \rotatebox{90}{$\models'$} \\
s & \mapsto & s'
\end{array}
$$

Im Spezialfall der informationstheoretischen Klassifikationssysteme, die den formalen Hintergrund für die Modellierung der Merkmalsstrukturen abgeben, drängt sich die Frage nach den Eigenschaften von Indizierungsrelationen zwischen endlichen konsistenten Mengen von Propositionen auf. in den Klassifikationssystemen, die durch zugrundeliegende Informationssysteme determiniert sind, spielen bekanntlich die Elemente von *Con* die Rolle der Typen.

Der Informationsfluß zwischen zwei informationstheoretischen Klassifikationsbereichen, die im Sinne der letzten Definitionen miteinander verknüpft sind, sollte als Minimalvorausetzung folgende drei Bedingungen erfüllen:

i. Wenn die Eingabe keine Information enthält, ist auch die in der Ausgabe enthaltene Information leer: $\emptyset \Rightarrow \emptyset$

ii. Alle Beiträge zur Information der Ausgabe, die aus einer festen Eingabe herrühren, sind untereinander konsistent: $u \Rightarrow v$ und $u \Rightarrow v'$ impliziert $u \Rightarrow v \cup v'$

iii. Die Indizierungsrelation ist in Harmonie mit den Folgerungsrelationen der repräsentierenden Informationssysteme: $u' \vdash u, u \Rightarrow v, v \vdash' v'$ impliziert $u' \Rightarrow v'$

Aus Resultaten von SCOTT folgt, daß die angeführten Minimalbedingungen optimal in dem Sinne sind, daß durch sie sämtliche Signalrelationen spezifiziert werden, die berechnungstheoretisch von Bedeutung, d.h. *stetig* sind.

THEOREM 3. *Seien* $\mathsf{D} = (\mathsf{D}, \mathrm{Con}, \vdash)$ *und* $\mathsf{D}' = (\mathsf{D}', \mathrm{Con}', \vdash')$ *zwei Informationssysteme. Jeder stetigen Funktion* f *zwischen den Informationsträgern der abgeleiteten Klassifikationsbereiche* $\mathsf{KB}(\mathsf{D})$ *und* $\mathsf{KB}(\mathsf{D}')$ *entspricht in umkehrbar eindeutiger Weise eine Relation* $\Rightarrow$*, die die Bedingungen (i)–(iii) erfüllt. Das Paar* $\mathsf{C} = (\mathsf{f}, \Rightarrow)$ *ist eine Informationsverknüpfung.*

Dieses Theorem hat eine direkte Anwendung auf Merkmalsstrukturen und ihre Beschreibungen durch Pfadgleichungen. Um eine berechnungstheoretisch sinnvolle Abbildung zwischen verschiedenen Merkmalsstrukturen zu analysieren, genügt es, sich auf solche Beziehungen zwischen konsistenten endlichen Mengen von Gleichungen zu konzentrieren, die einen kumulativen Gewinn an Information garantieren (ii) und kompatibel mit der zugrundeliegenden Folgerungsrelation sind (iii). Das Theorem involviert somit einen erheblichen technischen Vorteil: Anstatt Probleme mithilfe aufwendiger Konstruktionen von Fall zu Fall lösen zu müssen, erlaubt die allgemeine Charakterisierung der informationellen Verbindung zwischen den einschlägigen Klassifikationsbereichen den Einsatz der eleganten Methoden der Bereichstheorie.

6. SCHLUSSBEMERKUNG

Wir haben gezeigt, wie sich in *situationstheoretischem* Rahmen eine deklarative Semantik für die Beschreibungen von Merkmalsstrukturen entwickeln läßt. Diese Entwicklung diente dem Ziel, auch für den Formalismus selbst eine situationstheoretische Einbettung zu skizzieren. Verwendungen dieses Formalismus in bestimmten Grammatikmodellen weisen der situationstheoretisch formulierten Semantik bei ihrer Zeichenanalyse eine prominente Rolle zu.

Spezifikationen der Denotation von grammatischen Datenstrukturen haben aus den zu Beginn erwähnten Gründen positive Effekte auf den

Entwurf, die Interpretation und die Implementation von formalen Systemen. Wir erwarten insbesondere, daß eine bereichstheoretisch fundierte deklarative Deutung der Prinzipien- und Parametertheorie dazu beitragen wird, eine größere Sicherheit in der Anwendung bislang unüberschaubarer Repräsentationsmedien zu vermitteln. Einen ersten Schritt in diese Richtung macht der folgende Teil.

Literatur

Barwise, Jon (1992): Information Links in Domain Theory. *LNCS* 598, 168–192

Pereira, Fernando C.N. & Stuart Shieber (1984): The Semantics of Grammar Formalisms Seen As Computer Languages. *Proceedings COLING* 10, 123–129

Kracht, Marcus (1995): Syntactic Codes and Grammar Refinement. *J. Logic, Lang. & Inform.* 4, 41–60

LOGISCH PRÄSENTIERBARE BEREICHE FÜR GRAMMATISCHE FORMALISMEN

ZUSAMMENFASSUNG. In dieser Arbeit wird nachgewiesen, daß durch eine Anwendung klassischer modelltheoretischer Methoden sich eine bereichstheoretische Interpretation für die schwache monadische Logik zweiter Stufe mit mehreren Nachfolgerfunktionen gewinnen läßt. Wie gezeigt wird, legt die Äquivalenz zwischen kontextfreien Sprachen und Formeln der schwachen monadischen Logik zweiter Ordnung es nahe, eine Familie kontextfreier Sprachen im modelltheoretischen Sinn als einen Typ der genannten logischen Sprache zu betrachten. Auf dieser Grundlage wird ein Bereich in der Form konstruiert, daß in ihm die Erfüllbarkeitsmengen von Bäumen, die eine Formel dieser schwachen Spezifikationssprache zweiter Ordnung wahr machen, die Rolle von kompakten Elementen übernehmen. Im Gegensatz zu dem inkrementellen Informationszuwachs, der für einen derivationellen Ansatz kennzeichnend ist, legt sich für das modelltheoretische Vorgehen eine Halbordnung nahe, bei der eine Erfüllbarkeitsmenge L eine bessere Approximation bildet als eine Erfüllbarkeitsmenge L', wenn L in L' enthalten ist und damit weniger Alternativen offenläßt. Die erforderliche Vollständigkeitseigenschaft, die es erlaubt, unendlichen Sequenzen von Approximationen einen eindeutigen Wert zuzuweisen, wird durch eine geeignete Filterkonstruktion gesichert. Die Filterkonstruktion hat die angenehme Eigenschaft, daß für nahezu alle linguistisch interessanten Definitionsformen sich die Erfüllbarkeit der entsprechend konstruierten Formeln der grammatischen Spezifikationssprache von dem ursprünglichen auf das Filtermodell überträgt. Somit erhalten zumindest jene Begriffe aus der PP-Theorie eine Deutung informationstheoretischen Gehalts, die sich mit den Mitteln dieser Logik explizieren lassen. Mit dieser Deutung liegt freilich noch keine verbindliche deklarative Interpretation vor, die dann auch für diese Strukturen Korrektheit, Universalität der Interpretation und Effizienz der Implementation in dem Maße vorbereiten würde, wie dies schon für andere, berechnungstheoretisch besser untersuchte Ansätze geschehen ist.

1. EINLEITUNG

In den letzten Jahren sind modelltheoretische Methoden mit großem Erfolg auf die formale Interpretation von grammatischen Systemen angewandt worden. Unter anderem ist es gelungen, zentrale Begriffe des Modells, das sich auf eine Analyse der Interaktion von *Prinzipien und Parameter* konzentriert, im Rahmen einer zwar ausdrucksstarken, aber dennoch algorithmisch beherrschbaren Logik zu charakterisieren. Dieses Ergebnis war in dieser Form nicht erwartet worden, da die dabei verwandte Beschreibungssprache, die schwache monadische Logik zweiter Stufe mit mehreren Nachfolgeroperationen, nach einem klassischen Resultat über reguläre Baumsprachen nur solche Konfigurationen zu erfassen vermag, die auf der Ebene der Verkettungen zu kontextfreien Sprachen führen.

Ungeachtet dieser Einschränkung auf die zweite Stufe der Chomsky Hierarchie sind die Vorteile einer logischen Charakterisierung grammatischer Grundbegriffe so deutlich, daß die Entdeckung kontext-sensitiver Phänomene in natürlichen Sprachen Anlaß dafür gewesen ist, diesen Phänomenen eine reguläre Gestalt zu geben, anstatt die monadische Logik zweiter Stufe zu verwerfen. Die Vorteile einer logischen Beschreibungssprache bestehen insbesondere darin, daß sie es mit Hilfe eines geeigneten nicht-logischen Basisvokabulars erlaubt, üeber linguistisch relevante Strukturen und die in ihnen geltenden Relationen direkt zu sprechen. Unter analogen 'lexikalischen' Voraussetzungen kann das logische Idiom auch als Spezifikationssprache für diese Strukturen und Relationen verwandt werden. Der unmittelbare Bezug auf bestimmte strukturelle Eigenschaften, die für den Linguisten von Interesse sind, ist in vielen Fällen im Medium eines Grammatikformalismus nicht erreichbar und erst auf einer metagrammatischen Ebene aus allgemeinen Gesetzmässigkeiten des Regelmechanismus zu erschließen. Es ist daher von großem Interesse, die praktischen und theoretischen Vorzüge einer grammatikunabhängigen Beschreibung sprachlicher Fakten zu nutzen, um von den technischen Vorgaben eines operationalen Produktionssystems befreit zu sein.

Die erfolgreiche Anwendung dieser Methodologie erscheinen grammatische Strukturen nicht mehr als Ergebnisse eines stufenweisen Generierungsprozesses, sondern als Erfüllungsmengen eines logischen Ausdrucks. Modellklassen, die einen logischen Ausdruck wahr machen, eignen sich zwar vorzüglich dazu, Abschluß- und Entscheidbarkeitseigenschaften nachzuweisen, solange sich diese aus den metamathematischen Eigenschaften der zugrundeliegenden Logik ergeben, aber die Modellklassen selbst haben auf dieser Abstraktionsebene keinen Bezug zu einander und entbehren jeglicher berechnungstheoretischer Fuundierung.

Eine wünschbare Ergänzung der deklarativen Interpretation von Grammatikformalismen durch elementare Modellklassen würde in einer semantischen Explikation bestehen, deren Struktur durch berechnungstheoretische Überlegungen motiviert ist. Wie wir im zweiten Abschnitt erläutern werden, bietet sich für eine entsprechende semantische Ergänzung die Bereichstheorie an. Bei ihr handelt es sich ebenfalls um eine modelltheoretisch inspirierte deklarative Interpretationsvariante, in der man von dem operationalen Aspekt einer Berechnung absieht und sich auf die statische Komponente einer Modellierung des Berechnungsresultats konzentriert. Das Resultat wird jedoch in dieser Theorie durchaus als gegebenenfalls abstraktes Ziel eines nicht-endlichen Approximationsprozesses gesehen. Es ist diese Eigenschaft eines zur Modellierung von Berechnungsvorgängen angemessenen Bereichs, nämlich eine Grundlage für die Analyse von Berechnungen im Rahmen von einer Sequenz von Annäherungen an einen abstrakten Fluchtpunkt anzubieten, die bisher eine Deutung der grammatisch-theoretisch motivierten Modellklassen im bereichstheoretischen Sinn verhindert hat. Die Schwierigkeit besteht darin, daß für die Existenz abstrakter Endpunkte für Approximationsprozesse kein Analogon in den Familien regulärer Baumklassen zu finden war. In technischer Terminologie, die erst im folgenden Abschnitt eingeführt wird, läßt sich das Problem an der fehlenden ω-Vollständigkeit grammatischer Modellklassen festmachen.

Wir werden für eine berechnungstheoretisch motivierte Deutung von grammatischen Modellklassen einen Vorschlag machen, in dem die aus der Topologie entlehnte Eigenschaft von Annäherungsprozessen, zu einem eindeutigen Ergebnis zu führen, durch die modelltheoretisch definierte Eigenschaft der sog. *Saturiertheit* ersetzt wird. Im einzelnen bedeutet dies, daß die logische Spezifikation von grammatiktheoretisch relevanten Strukturen und Relationen nicht aufgegeben werden muß. Die entscheidende Erweiterung drückt sich darin aus, daß die Baummodelle, die die intendierte Deutung der logischen Ausdrücke bilden, zu Atomen eines logisch präsentierten Scott-Ershov Bereichs werden. Die konkrete Konstruktion, die über die Reduktion einer Potenzmenge durch einen regulären Filter verläuft, garantiert die erwähnte Saturiertheitsbedingung, die die Rolle der topologischen Vollständigkeitsbedingung übernimmt.

2. Bereichstheoretische und modelltheoretische Grundlagen

2.1. Bereichstheorie. Unter einer Berechnung verstehen wir dabei einen schrittweisen Prozess, in dem nach jedem einzelnen Schritt ein Zuwachs an Information über das Ergebnis der Berechnung erzielt wird. Gemäß einer alternativen Betrachtungsweise läßt sich die Kette der Zwischenresultate auch als eine schrittweise Annäherung oder Approximation an das Endresultat auffassen. Das Endresultat muß nicht unbedingt nach einer endlichen Zahl von Schritten vorliegen, sondern kann durchaus in der unendlichen Progression von Approximationen bestehen. Diese intuitive Beschreibung läßt erwarten, daß sich auf der Grundlage einer angemessenen Theorie des Begriffs der Annäherung ein fruchtbarer Ansatz für eine semantische Präzisierung von Berechnungsverfahren entwickeln läßt. Die eben skizzierte Grundidee zur Modellierung von Berechnungsverfahren ist in mathematisch präziser Form in das Konstrukt eines *Bereichs* eingegangen. Ein Bereich ist eine Struktur mit einer zweistelligen Relation $\sqsubseteq$, deren Bedeutung sich dadurch angeben läßt, daß zwischen zwei Elementen x und y diese Relation genau dann besteht, d.h. $x \sqsubseteq y$ der Fall ist, wenn y mindestens soviel Information wie x enthält oder, gemäß der alternativen Betrachtungsweise, x eine Annäherung an y darstellt. In diesem Zusammenhang erweist es sich oft als nützlich, ein Element zur Verfügung zu haben, das ohne jeden Gehalt ist und nicht Träger irgendwelcher Information ist. Schließlich sollte die Bereichsstruktur über bestimmte Vollständigkeitseigenschaften verfügen, die es ermöglichen, den gerade erwähnten Approximationsketten ein einzelnes Element zuzuweisen, das dann gewissermaßen das ideale Endresultat einer unendlichen Berechnung repräsentiert.

Im tatsächlichen Vollzug von Berechnungsvorgängen spielen aus naheliegenden Gründen nur konkrete, endliche Objekte eine Rolle. Jeder einzelne Berechnungsschritt vollzieht sich notwendigerweise im Übergang von einem endlichen Objekt zu einem anderen, das einen höheren Informationswert verkörpert. Die grundlegende Idee zur Modellierung von Berechnungsverfahren muß daher in dem Sinne konkretisiert werden, daß wir es dabei nicht mit einem Approximationsprozess zu tun haben, der eine Sequenz von Elementen beliebiger Natur betrifft, sondern mit einem Prozess, nach dem jedes berechnungstheoretisch relevante Element—und allein solche Elemente machen das Universum eines Bereichs aus—sich als Approximation von endlichen Elementen darstellt. Wenn ein Bereich diese Bedingung erfüllt und außerdem noch garantiert ist, daß zu je zwei endlichen Elementen mit kompatiblen Informationsgehalt ein endliches Element existiert mit minimalem Informationszuwachs im Verhältnis zu den beiden anderen Elementen, handelt es sich um einen *Scott-Ershov* Bereich.

Die semantische Analyse eines Berechnungsverfahrens, wie sie in den letzten Absätzen skizziert wurde, geht auf D.S. Scott zurück und wird inzwischen allgemein als angemessene Explikation des Verständnisses akzeptiert, das wir mit diesem intuitiven Begriff verbinden. In der Art der Darstellung sind wir den Einführungen von Plotkin (1983) und Stoltenberg-Hansen et al. (1994) verpflichtet. In beiden Einführungen finden sich auch ausführliche Begründungen für die besondere Stellung, die den Scott-Ershov Bereichen aufgrund ihrer vorteilhaften berechnungstheoretischen Eigenschaften zukommt.

In dieser Situation wäre es von besonderem Interesse, die zu Beginn der Einleitung hervorgehobenen positiven Eigenschaften einer modelltheoretischen Behandlung grammatischer Formalismen mit einer berechnungstheoretisch fundierten Semantik zu verbinden. Das Interesse richtet sich mit andern Worten darauf, an der kontrollierten Ausdruckstärke und Flexibilität der logischen Beschreibungssprache, die sich bei der Analyse theoretischer Annahmen in der Linguistik bewährt hat, festzuhalten und ihre modelltheoretische Interpretation in einem berechnungstheoretisch motivierten Rahmen zu stellen.

Ein verwandter Versuch ist im Zusammenhang mit den zahlreichen Vorschlägen zur formalen Semantik von Programmiersprachen gemacht worden, die die ADJ-Gruppe vorgelegt hat. Der Ansatz dieser GRuppe konzentriert sich zwar nicht auf Sprachen im Sinne von Erfüllbarkeitsmengen logischer Ausdrücke, sondern auf Sprachen im Sinne von Lösungsmengen von Gleichungssystemen, aber der Lösungsraum selbst, der bei Gleichungsdefinitionen für formale Sprachen eine ausgezeichnete Stellung einnimmt, hat von seiner Struktur her wichtige Auswirkungen für die Theorie von Berechnungsverfahren. Es handelt sich bei diesem Lösungsraum um die stetige initiale Algebra von partiellen Σ-Termen für eine geignete Signatur Σ von Symbolen und deren Typenzuweisungen. Gleichungssysteme für reguläre Baumsparchen haben eindeutige Lösungen in dieser Algebra, eine ω-Kette von derartigen Lösungen muß jedoch nicht unbedingt eine gleichungsdefinierte Sprache als Supremum haben. In diesem Sinne ist unsere Anmerkung in der Einleitung zu verstehen, daß bisherige Versuche, für formale Sprachen eine berechnungstheoretisch interessante Interpretation zu finden, an der fehlenden Vollständigkeitseigenschaft des Deutungsraums gescheitert sind.

Wir stellen die bisher motivierten technischen Termini der besseren Übersicht halber in einigen Definitionen zusammen.

Definition 1. Sei $D = (D, \sqsubseteq$ eine Halbordnung. Eine Menge $A \subseteq D$ heißt *gerichtet*, wenn sie nicht leer ist und wenn gilt, daß für alle $x, y \in A$ ein $z \in A$ existiert mit $x \sqsubseteq z$ und $y \sqsubseteq z$.

Falls für eine Menge $A \subseteq D$ eine kleinste obere Schranke existiert, bezeichnen wir sie mit $\bigsqcup A$.

Definition 2. Sei $D = (D, \sqsubseteq, \perp$ eine Halbordnung mit einem kleinsten Element. Wir nennen D eine *vollständige Halbordnung*, falls für jede gerichtete Menge $A \subseteq D$ eine kleinste obere Schranke $\bigsqcup A$ in D existiert.

Wir haben oben auf die Rolle von endlichen Elementen in der Modellierung von Berechnungsvorgängen hingewiesen. Wenn ein endliches Element im wörtlichen Sinn eine geringere Mächtigkeit hat als eine Summe von Elementen, dann ist dieses Element kleiner als einer der Summenanden. Wir nehmen diese Eigenschaft als Grundlage für einen abstrakten Endlichkeitsbegriff.

Definition 3. Sei D eine vollständige Halbordnung. Ein Element $a \in D$ heißt *kompakt* oder *endlich*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist. Sei AcD eine gerichtete Menge und gelte $A \sqsubseteq \sqcup A$; dann gibt es ein $x \in A$ mit $a \sqsubseteq x$. Wir bezeichnen die menge der endlichen Elemente in D mit D_f.

Da ein Berechnungsvorgang aus einer Sequenz von endlichen Elementen besteht, sind wir insbesondere an Strukturen interessiert, die vollständig durch ihre endlichen Elemente dterminiert sind.

Definition 4. Eine vollständige Halbordnung D heißt *algebraisch*, wenn für jedes $x \in D$ die Menge seiner Approximationen $\mathrm{approx}(x) = \{a \in D_f \mid a \sqsubseteq x\}$ gerichtet ist und folgendes gilt: $x = \bigsqcup \mathrm{approx}(x)$.

Die algebraischen Halbordnungen weisen zwar eine Reihe von wünschenswerten berechnungstheoretischen Eigenschaften auf, sie sind jedoch nicht abgeschlossen im Hinblick auf die Bildung von Funktionsräumen. Die Klasse von algebraischen Halbordnungen, in denen für je zwei endliche Elemente, die ene obere Schranke haben, eine kleinste obere Schranke existiert, sind jedoch gegenüber diesem entscheidenden Konstruktionsprinzip abgeschlossen.

Definition 5. Eine algebraische Halbordnung D heißt ein *Scott-Ershov Bereich*, wenn für beliebige endliche Elemente $a, b \in D_f$, die *konsistent* sind, d.h. für die ein $x \in D$ existiert, so daß $a \sqsubseteq x$ und $b \sqsubseteq x$ gilt, in D eine kleinste obere Schranke $\bigsqcup\{a, b\}$ vorhanden ist.

Es ist schon mehrfach darauf hingewiesen worden, daß das Hauptproblem, das sich einer berechnungstheoretisch interessanten Deutung von grammatisch motivierten Erfüllbarkeitsmengen von Baumstrukturen entgegenstellt, in der fehlenden Vollständigkeitseigenschaft besteht. Unter geeigneten Voraussetzungen läßt sich diese Voraussetzung über einen Vervollständigungsprozess erfüllen, der seinen Ausgang von Strukturen nimmt, die den *Scott-Ershov Bereich* bis auf die kritische Vollständigkeit sehr ähnlich sind. Wir werden uns im letzten Abschnitt auf einen Vervollständigungsprozess stützen und halten daher die Ausgangsstruktur in einer Definition fest.

Definition 6. Eine Halbordnung $P = (P, \sqsubseteq \bot)$ mit kleinstem Element ist ein *bedingter Halbverband mit kleinstem Element*, wenn für je zwei konsistente Elemente a, b in P eine kleinste obere Schranke $\bigsqcup\{a, b\}$ existiert.

2.2. Modelltheoretische Grundlagen. Die erfolgreiche Charakterisierung grammatischer Eigenschaften im Rahmen der schwachen monadischen Logik zweiter Stufe mit mehreren Nachfolgerfunktionen ist unsere Hauptmotivation, nach einem berechnungstheoretischen Bezug für die modelltheoretischen Interpretationen der logischen Spezifikationsformeln zu suchen. Obwohl nach dem zentralen Resultat in diesem Bereich der deskriptiven Komplexitätstheorie eine Baummenge genau dann in der genannten Logik definierbar ist, wenn sie auch durch eine reguläre Baumgrammatik beschrieben werden kann, fallen trotz dieser erheblichen Einschränkung wesentliche Grundbegriffe des *Prinzipien- und Parameter* Modells in den Definitionsbereich der Baumlogik, wie wir im folgenden die schwache monadische Logik zweiter Stufe mit mehreren Nachfolgerfunktionen nennen wollen. Als Vorbereitung für die Bereichskonstruktion im folgenden Abschnitt wollen wir einige Begriffe in Erinnerung rufen, die für die Formulierung des gerade erwähnten komplexitätstheoretischen Ergebnisses und der darauf aufbauenden Bereichskonstruktion benötigt werden.

Das Hauptziel der deskriptiven Komplexitätstheorie besteht darin, Eigenschaften und Probleme nach Maßgabe der Komplexität die sie ausdrückenden logischen Formeln zu klassifizieren. In diesem Forschungsgebiet hat die Baumlogik von Beginn an eine gewisse Rolle gespielt, da es auf der Basis ihres Grundvokabulars ohne weiteres möglich ist, über Baumstrukturen zu sprechen, sobald diese als (endliche) Modellstrukturen im klassischen Sinn aufgefaßt werden.

Wir betrachten zu diesem Zweck ein endliches Alphabet Σ von Symbolen, denen jeweils eine natürliche Zahl n zugeordnet ist, die die Zahl ihrer Argumente angibt. Ein (Baum-)Term über diesem Alphabet wird durch ein Modell der folgenden Form kodiert. Sei $\tau(\Sigma)$ ein (neues) Vokabular $L = \{<_i\}_{i \leq n} \cup \{P_a \mid a \in \Sigma\}$, wobei jedes $<_i$ für ein zweistelliges Relationssymbol und jedes P_a für ein monadisches Prädikationssymbol steht. Ein *etikettiertes Baummodell* M für einen Term t ist eine relationale Struktur

$$M = (B, <_i, P_a)_{i \leq n, a \in \Sigma}$$

in der B in bijektiver Korrespondenz zu $\mathrm{dom}(t)$, dem Baumbereich von t steht, $<_i$ die i-te Nachfolgerfunktion in relationaler Notation angibt, die Zahl n die maximale Stelligkeit eines Elements aus Σ bedeutet und die P_a auf die Knoten in t zutreffen, die das Etikett a tragen:

$$P_a = \{b \in B \mid \textit{Etikett}(b) = a\}$$

Unter einem Baum verstehen wir dabei ein System von Knotenadressen, das zwei Abschlußbedingungen unterliegt. Der *Baumbereich* B eines endlichen geordneten Baums mit höchstens n Verzweigungen eines einzelnen Knotens ist eine endliche Untermenge $B \subseteq \mathbb{N}_n^*$ für $\mathbb{N}_n := \{0, 1, \cdots, n-1\}$, in der die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

i. Falls $uv \in B (u, v \in \mathbb{N}_n^*)$ dann $u \in B$

ii. Falls $ui \in B$ und $j < i$ dann $uj \in B (u, \in \mathbb{N}_n^*)$

Die dieser Struktur korrespondierende Baumsprache ist die Sprache der schwachen monadischen Logik zweiter Stufe mit mehreren Nachfolgerfunktionen $\mathrm{MSOL}_n(\Sigma)$ (*Monadic Second-Order Logic with n successors*). Diese Sprache verfügt über *Knotenvariablen* $x, y, z, \ldots$ und *Mengenvariablen* $X, Y, Z, \ldots$ die über Untermengen des Baumbereichs laufen. Es werden vier Arten von atomaren Formeln unterschieden, nämlich

$x = y$, $x <_i y$, $P_a(x)$ und $x \in X$, wobei die i-te Nachfolgerfunktion wieder als rechtseindeutige Relation notiert ist. Die intendierte Bedeutung der Formeln läßt sich in der erwarteten Weise angeben: Knoten x und y sind identisch, y ist die i-te Tochter von x, Knoten x trägt das Etikett a und Knoten x ist ein Element der Knotenmenge X. Komplexe Formeln werden in üblicher Form durch propositionale Konnektoren und Quantoren gebildet, wobei im letzten Fall beide Sorten von Variablen gebunden werden können. Wenn A ein $\mathrm{MSOL}_n(\Sigma)$ Satz ist, d.h. eine Formel ohne freie Variablen, und M ein Baummodell, schreiben wir $M \models A$, um anzudeuten, daß A in M wahr ist. Falls eine Menge von Modellen L genau die Erfüllbarkeitsmenge eines Satzes A bildet, d.h. wenn $L = \mathrm{Mod}(A) = \{M \mid M \models A\}$, dann nennen wir diese Baummenge L *definierbar* in $\mathrm{MSOL}_n(\Sigma)$. Der folgende Satz definiert z.B. die Menge aller endlichen Bäume über einem Alphabet Σ:

$$(\forall x)(\bigvee_{a \in \Sigma} P_a(x)) \wedge \bigwedge_{\substack{a, b \in \Sigma \\ a \neq b}} \neg(P_a(x) \wedge P_b(x))$$

Uns steht nach diesen Vorbemerkungen die nötige Begrifflichkeit zur Verfügung, um das oben angedeutete zentrale Resultat der deskriptiven Komplexitätstheorie über das Verhältnis von Baumfamilien und deren Definierbarkeit im Rahmen einer speziellen Logik auszudrücken.

Theorem 1 (Doner, Thatcher, Wright). *Sei Σ ein endliches Alphabet, dessen Elementen ihre jeweilige Stelligkeit zugeordnet ist. Eine Menge von Bäumen über Σ ist genau dann in $\mathrm{MSOL}_n(\Sigma)$ definierbar, wenn sie regulär ist. Da kontext-freie (Ketten-)Sprachen die Blattsprachen von regulären Baummengen sind, ist das Ergebnis gleichbedeutend mit der Aussage, daß eine Sprache L genau dann kontext-frei ist, wenn es eine Formel in $\mathrm{MSOL}_n(\Sigma)$ gibt so daß $L = y(\mathrm{Mod}(A))$ ist, wobei y den eindeutigen Homomorphismus bezeichnet, der einen* *etikettierten Baum auf die Kette der Etiketten seiner Blätter abbildet.*

Unter unserer berechnungstheoretischen Perspektive ist es naheliegend, eine Menge von Bäumen als eine Nachbarschaft eines anvisierten Zielpunkts zu deuten und eine Menge in dieser Betrachtungsweise als informationsreicher als eine andere Menge anzusehen, wenn die erstgenannte Menge in der zweitgenannten enthalten ist. Da die logische Charakterisierung als unmittelbares Korollar garantiert, daß zwei im Sinne dieser Informationshalbordnung konsistente Baummengen eine kleinste obere Schranke besitzen, nämlich die Erfüllbarkeitsmenge der Konjunktion der sie definierenden Formeln, und wir außerdem gerade eine Formel angegeben haben, die das informationsleerste Element bezeichnet, die Menge aller Bäume, können wir als vorläufiges Ergebnis festhalten, daß die Denotationen der $\mathsf{MSOL}_n(\Sigma)$ Formeln einen *bedingten Halbverband mit kleinstem Element* bilden. Es wurde bei dem kurzen Verweis auf die Arbeiten der ADJ-Gruppe angedeutet, warum das übliche Vervollständigungsverfahren auf der Basis eines solchen Halbverbands in diesem konkreten Fall nicht unmittelbar anwendbar ist. Wir haben in dem Zusammenhang auch schon als Ausweg auf die modelltheoretische Eigenschaft der Saturiertheit verwiesen, der wir uns im folgenden Abschnitt widmen wollen.

3. Die logische Bereichskonstruktion

Am Ende des letzten Abschnitts haben wir festgehalten, daß die in der Sprache der schwachen monadischen Logik zweiter Stufe mit n Nachfolgerfunktionen $\mathsf{MSOL}_n(\Sigma)$ definierbaren (regulären) Baummengen einen bedingten Halbverband mit kleinstem Element bilden.

Lemma 2. *Die Erfüllbarkeitsmengen Mod(A) der Formeln A der schwachen monadischen Logik zweiter Stufe mit n Nachfolgerfunktionen $\mathsf{MSOL}_n(\Sigma)$ bilden einen bedingten Halbverband $\mathcal{R}$ mit kleinstem Element. Die Halbordnung $\sqsubseteq$ auf $\mathcal{R}$ ist die umgekehrte Mengeninklusion.*

Wie Stoltenberg-Hansen et al. (1994) gezeigt haben, läßt sich jeder Halbverband dieser Art zu einem Scott-Ershov Bereich vervollständigen, indem man die Gesamtheit der Ideale über dem bedingten Halbverband mit kleinstem Element betrachtet.

Definition 7. Sei P ein bedingter Halbverband mit kleinstem Element. Eine Untermenge $I \subseteq P$ ist ein *Ideal*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a. $\bot \in I$

b. wenn $a \in I$ und $b \sqsubseteq a$, dann $b \in I$

c. wenn $a, b \in I$, dann existiert die kleinste obere Schranke $\bigsqcup\{a, b\}$ in P und ist Element von I.

THEOREM 3 (Stoltenberg-Hansen, Lindström, Griffor). *Sei P ein bedingter Halbverband mit kleinstem Element und $\bar{P} = \{I \subseteq P \mid I$ ein Ideal$\}$ seine ideale Vervollständigung. Dann ist $\bar{\mathbf{P}} = (\bar{P}, \subseteq, [\bot])$ ein Scott-Ershov Bereich, wobei desen Halbordnung durch die Mengeninklusion gegeben ist und die kompakten Elemente die Form von Hauptidealen $[a] = \{b \in P \mid b \sqsubseteq a\}$ haben.*

Das Theorem liefert unmittelbar eine Bereichsinterpretation für die definierbaren regulären Baumsprachen. Sie enstprechen genau den Hauptidealen in $\mathcal{R}$, wobei gemäß der Halbordnung auf $\mathcal{R}$ jedes derartige Hauptideal aus einer regulären Sprache und allen *definierbaren* Obermengen besteht. Die Redeweise von einem *logisch präsentierten* Bereich hätte allerdings erst dann ihre volle Rechtfertigung, wenn alle Elemente aus $\bar{\mathcal{R}}$ der Erfüllbarkeitsmenge einer Formel A oder einer menge von Formeln Γ aus $MSOL_n(\Sigma)$ entsprächen.

Sehen wir uns zu diesem Zweck die Kompaktheitseigenschaft der Hauptideale $[Mod(A)]$ für $A \in MSOL_n(\Sigma)$ genauer an, so läßt sich leicht nachweisen, daß für jedes Ideal I in $\bar{\mathcal{R}}$ gilt, daß $I = \bigcup\{[Mod(A)] \mid Mod(A) \in I\} = \bigsqcup\{[Mod(A)] \mid Mod(A) \in I\}$. Jedes Ideal in $\bar{\mathcal{R}}$ hätte somit eine logische Präsentation, wenn für jede Menge von Formeln Γ aus $MSOL_n(\Sigma)$ mit dem nicht-leeren Schnitt der definierten Baumsprachen für jede endliche Untermenge von Γ auch schon gegeben wäre, daß $\bigcap\{Mod(A) \mid A \in \Gamma\} \neq \emptyset$. Der Grund für diese Behauptung sollte unmittelbar einsichtig sein, da die Halbordnung auf $\bar{\mathcal{R}}$ die Mengeninklusion ist und ein Ideal somit ein anderes umfaßt, wenn zu jedem kompakten Element des kleineren Ideals ein kompaktes Element des größeren Ideals existiert, so daß im Sinne der Halbordnung auf $\mathcal{R}$ selbst die dem letztgenannten kompakten Element korrespondierende Modellklasse informationsreicher, d.h. als Menge von Bäumen betrachtet, eine Untermenge der Modellklasse bildet, die dem erstgenannten kompakten Element entspricht.

In Anlehnung an die übliche Terminologie der Modelltheorie nennen wir eine Menge von Formeln Γ aus $\mathrm{MSOL}_n(\Sigma)$ einen *Typ*, wenn für jede endliche Untermenge $\Gamma' \subseteq \Gamma$ gilt, daß $\bigcap\{\mathrm{Mod}(A) \mid A \in \Gamma'\} \neq \emptyset$. Wir nennen dann ebenfalls in Anlehnung an die modelltheoretische Terminologie einen Denotationsraum für $\mathrm{MSOL}_n(\Sigma)$ (ω-)*saturiert*, wenn die Modellklassen jeden Typs in diesem Raum einen nicht-leeren Durchschnitt haben. Es wird sich herausstellen, daß sie Typen eines saturierten Raums die logisch präsentierten Elemente eines Scott-Ershov Bereichs bilden.

Die Einsicht, daß die modelltheoretische Eigenschaft der Saturiertheit an die Stelle einer Vollständigkeitsbedingung treten kann, scheint in jüngster Zeit für die Konstruktion von inversen Limites eine prominente Rolle zu spielen. Sie hat ihren Ursprung in topologischen Überlegungen und findet sich z.B. in der Form von Kompaktheitsargumenten bei Engelking (1977). Die Anwendung auf die Prädikatenlogik erster Stufe haben Palmgren und Stoltenberg-Hansen (1995) gesehen, die auch für diesen klassischen Kontext eine Entsprechung des folgenden Theorems bewiesen haben.

THEOREM 4. *Sei* $\mathfrak{U}$ *ein* ω*-saturierter Denotationsraum für* $\mathrm{MSOL}_n(\Sigma)$*. Die Erfüllbarkeitsklassen der Typen* Γ *in der Sprache* $\mathrm{MSOL}_n(\Sigma)$ *bilden einen Scott-Ershov Bereich, dessen kompakte Elemente die Erfüllbarkeitsklassen der einzelnen Formeln Mod(A) sind und dessen Halbordnung durch die umgekehrte Mengeninklusion gegeben ist.*

Bemerkung. Die Modellklassen $\mathrm{Mod}(A), \mathrm{Mod}(\Gamma)$ sind im Hinblick auf $\mathcal{U}$ gebildet. Es handelt sich bei ihnen nicht um reguläre Baumsprachen, da diese die kritische Vollständigkeitsbedingung nicht erfüllen. Sei z.B. $\{A_n\}$ eine Folge von Formeln aus $\mathrm{MSOL}_n(\Sigma)$, die im Hinblick auf ihre Modellklassen keinen nicht-leeren Schnitt haben, d.h. $\bigcap_n\{\mathrm{Mod}(A_n)\} = \emptyset$, dann entspricht der Folge $\{A_n\}$ die leere Sprache, auch wenn es sich bei dieser Folge um einen Typ handelt.

Beweis (nach Palmgren-Stoltenberg-Hansen (1995)).
Sei $M = \mathrm{Mod}(\Gamma_i)$, $(i \in I)$ eine gerichtete Menge. Es handelt sich dann bei $\Gamma = \bigcup_i \Gamma$ um einen Typ, da jede endliche Untermenge $\Gamma' \subseteq \Gamma$ eine nicht-leere Realisierung in der oberen Schranke der $\mathrm{Mod}(\Gamma_i)$ hat, aus denen die Formeln in Γ' stammen. Nach Voraussetzung über die Saturiertheit von $\mathcal{U}$ liefert $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ die kleinste obere Schranke von M. Es handelt sich also bei D um eine vollständige Halbordnung. Die Tatsache, daß es sich

bei den regulären" Sprachen $\mathsf{Mod}(A)$ um die kompakten Elemente in D handelt, folgt ebenfalls leicht aus der Saturiertheit von $\mathcal{U}$. $\square$

Um die Existenz eines saturierten Deutungsraumes für $\mathsf{MSOL}_n(\Sigma)$ nachzuweisen, bedienen wir uns wieder der Analogie mit analogen Verfahren der klasssischen Modelltheorie. Wir benötigen zunächst den Begriff eines Filters.

Definition 8. Sei I eine nicht-leere menge und $P(I)$ die Menge aller Untermengen von I. Ein *Filter* F auf I wird definiert als eine Menge $F \subseteq P(I)$ mit folgenden Eigenschaften:

a. $I \in F$

b. Wenn $X, Y \in F$, dann $X \cap Y \in F$

c. Wenn $X \in F$ und $X \subseteq Z \subseteq F$, dann $Z \in F$.

Ein Filter F heißt *Ultrafilter*, wenn für jedes $X \in P(I)$ gilt, daß entweder X oder $I \backslash X$ ein Element von F und $\emptyset$ kein Element von F ist.

Sei U ein Filter über I und $\mathcal{R}$ die Menge der definierbaren Baummengen von oben, d.h. $\mathcal{R} = \{\mathsf{Mod}(A) \mid A \in \mathsf{MSOL}_n(\Sigma)\}$. Wir legen fest, was es heißt, daß eine Formel A in der Struktur $\mathcal{U} = (\bigcup \mathcal{R})^I/U$, wobei es sich bei $\mathcal{U}$ um die Ultrapotenz der Menge $\bigcup \mathcal{R}$ nach dem Ultrafilter U handelt, erfüllt ist. Da $\bigcup \mathcal{R} = T(\Sigma)$, die Menge aller endlichen Bäume über Σ, ist die Frage gleichbedeutund damit, ob $T(\Sigma)^I/U \models A$ der Fall ist. Das Universum von $\mathcal{U}$ besteht definitionsgemäß aus allen I-Folgen von Bäumen aus $T(\Sigma)$, wobei zwei I-Folgen f und g identifiziert werden, wenn die Komponenten, an denen sie übereinstimmen, d.h. $\{i \in I \mid f(i) = g(i)\}$, ein Element von U bilden. Die Erfüllbarkeitsmenge von A besteht nun aus solchen Folgen f, bzw. deren Äquivalenzklassen f/U unter der eben angegebenen Identifikation, für die wiederum $\{i \in I \mid f(i) \in \mathsf{Mod}(A)\}$ ein Element von U ist. Anstatt uns zu fragen, ob ein Baum zu einer durch A definierten Baumsprache gehört, betrachten wir Folgen von Bäumen und zählen eine solche Folge f zu der durch A in $\mathcal{U} = T(\Sigma)^I/U$ definierten Menge, wenn $\mathsf{Mod}(A)$ an allen Punkten eines Elements von U sich mit f trifft.

Von besonderem Interesse für unsere Zwecke sind diejenigen Ultrafilter, die die Potenz $T(\Sigma)^I$ zu einer ω-saturierten Struktur reduzieren.

Definition 9. Sei I eine unendlichemenge. Ein Ultrafilter U auf I heißt *regulär*, wenn es eine Teilmenge X_j $(j \in I)$ in U gibt, so daß für jedes $i \in I$ die Menge $\{j \mid i \in X_j\}$ endlich ist.

Wir verzichten auf den Nachweis der Existenz von regulären Filtern (vgl. Chang-Keister (1990), Prop. 4.3.5) und beschränken uns darauf, die Saturiertheit von $T(\Sigma)^I/\mathsf{U}$ zu zeigen für einen regulären Filter U auf I.

THEOREM 5 (Frayne, Morel & Scott).
Sei Γ *ein Typ der Sprache* $\mathrm{MSOL}_n(\Sigma)$, I *eine unendliche Menge und* U *ein regulärer Filter auf* I. *Dann ist* $\bigcap\{\mathrm{Mod}(A) \mid A \in \Gamma\} \neq \emptyset$, *wobei die Formeln in* Γ *in* $\mathcal{U} = T(\Sigma)^I/\mathsf{U}$ *ausgewertet werden.*

Beweis. Wegen der Regularität von U gibt es eine Familie von Mengen $\{X_A \mid A \in \Gamma\}$ in U, so daß für jedes $i \in I$ die Menge $\Gamma_i = \{A \in \Gamma \mid i \in X_A\}$ endlich ist. Da es sich bei Γ um einen Typ handelt, gibt es definitionsgemäß für jedes Γ_i einen Baum t_i, der in allen durch die Mitglieder von Γ_i definierten Sprachen, d.h. regulären Baummengen, vorkommt. Sei f die I-Folge, für die $f(i) = t_i$ gilt. Wenn $i \in X_A$, dann $A \in \Gamma_i$, und somit $t_i \in \mathrm{Mod}(A)$. Daraus ergibt sich, daß X_A in der Menge der Punkte enthalten ist, an denen sich f und $\mathrm{Mod}(A)$ treffen. Nach unseren Stipulationen bedeutet dies, daß $\mathcal{U} = T(\Sigma)^I/\mathsf{U} \models A$. □

Damit ist auch die Konstruktion einer saturierten Extension der regulären Baummengen abgeschlossen. Es ist eventuell der Eindruck entstanden, daß beim Übergang der Ultrapotenz U die definierbaren, regulären Baumsprachen nicht erhalten geblieben sind. Das Gegenteil ist jedoch der Fall. Jede definierbare Menge Mod(A) läßt sich durch die Abbildung $d : \mathrm{Mod}(A) \to \mathcal{U}$, die jedem Baum t in $\mathrm{Mod}(A)$ die Äquivalenzklasse der konstanten I-Folge $f(i) = t$ zuweist, in $\mathcal{U}$ einbetten.

4. Schlussbemerkung

4.1. In unseren Betrachtungen sind wir zwar von der erfolgreichen Analyse linguistischer Strukturhypothesen mit den Mitteln der schwachen monadischen Logik zweiter Stufe ausgegangen, aber wir haben keinen Gebrauch von beweistheoretischen Methoden oder rekursiven Definitionen der Erfüllbarkeit von Formeln dieser Logik in einem bestimmten Modell gemacht. Die etikettierten Baummodelle haben die Rolle von Atomen gespielt, deren internen Aufbau wir keine Aufmerksamkeit geschenkt haben. Mit einer gewissen Berechtigung ließe sich sagen, daß der Kern unseres Nachweises einer berechnungstheoretisch relevanten Deutung der regulären Baumsprachen und damit auch der kontext-freien Kettensprachen sich nicht so sehr logischer, sondern rein mengentheoretischer Techniken bedient hat. Allein durch diesen Verzicht auf eine Berücksichtigung der speziellen logischen Eigenschaften der Sprache der schwachen monadischen Logik zweiter Stufe war es möglich, die Verfahren, die insbesondere von Palmgren und Stoltenberg-Hansen im Hinblick auf die klassische Modelltheorie der Prädikatenlogik erster Stufe entwickelt sind, auf die Verhältnisse der aus linguistischer Sicht attraktiven Baumlogik anzuwenden. Vor diesem methodologischen Hintergrund sahen wir es auch als gerechtfertigt an, die Beziehung zwischen Formeln der schwachen monadischen Logik zweiter Stufe und den etikettierten Baummodellen in kavaliersmäßiger Unpünktlichkeit zu behandeln. Selbstverständlich ist ein Satz aus $\mathsf{MSOL}_n(\Sigma)$ in höchstens einem etikettierten Baummodell wahr, und die Menge $\mathsf{Mod}(A)$ entspricht Belegungen der monadischen Prädikate P_a $(a \in \Sigma)$, wobei eine Belegung genau dann ein Baummodell zu $\mathsf{Mod}(A)$ beisteuert, wenn A unter dieser Belegung in dem entsprechenden Modell wahr ist. Der Leser wird ohne weiteres diese Ergänzungen vornehmen haben können und gesehen haben, daß die bereichstheoretische Konstruktion in der vorliegenden Form ohne weitere Schwierigkeiten auf andere Versuche übertragbar ist, Baumstrukturen in einer präzisen Sprache zu spezifizieren. Wir denken in diesem Zusammenhang insbesondere an die modallogisch inspirierten Arbeiten, die P. Blackburn, M. Kracht und andere vorgelegt haben. Solange die Spezifikationssprache über das Minimum an syntaktischem Aufbau verfügt, der für den Nachweis eines bedingten Halbverbandes mit kleinstem Element nötig ist, kann die Konstruktion des letzten Abschnitts ohne wesentliche Veränderungen wiederholt werden.

4.2. Die Betonung der atomaren Struktur der Baummodelle veranlaßt uns zu einer Bemerkung zu dem Verhältnis zwischen Informationsstrukturen und Scott-Ershov Bereichen. In dem ersten Teil des vorliegenden Heftes haben wir die ebenfalls von Scott eingeführten Informationsstrukturen als Grundlage für unsere Überlegungen gewählt, da sie sich als besonders geeignet für die Analyse von merkmalsbasierten Grammatikmodellen erwiesen haben. In vergleichbarer Weise schließen die Scott-Ershov

Bereiche unmittelbar an die Intuition an, die in der Erfüllbarkeitsklasse einer Formel eine approximative Eigenschaft oder eine Nachbarschaft sieht, deren Informationsgehalt mit abnehmender Extension steigt. Abgesehen von diesen intuitiven Affinitäten sind jedoch beide Modelle für die Semantik von Berechnungsvorgängen äquivalent. Jedem Informationssystem I entspricht ein Scott-Ershov Bereich $|\mathrm{I}|$ und jeden Bereich D ein Informationssystem $\mathrm{I}(\mathrm{D})$ in der Weise, daß $|\mathrm{I}(\mathrm{D})| \cong \mathrm{D}$, wobei die Isomorphie von rechts nach links dadurch gegeben ist, daß jedem Element von D die Menge seiner kompakten Approximation zugeordnet wird.

4.3. Zu Beginn des ersten Teils des vorliegenden Heftes haben wir als ein Desiderat für Grammatikformalismen in der generativen Tradition die Lösung des universellen Problems informationstheoretisch orientierter Deutungsmodelle erwähnt. Mit einem universellen Problem verbinden wir die übliche kategorientheoretische Bedeutung, wonach ein universelles Problem in dem Moment als gelöst gilt, wo alle möglichen Lösungen über eine bestimmte ausgezeichnete Lösung faktorisiert sind. Die Lösung eines universellen Problems liefert somit die Begründung für die Unausweichlichkeit der ausgezeichneten Antwort auf die mit dem Problem gestellte Frage. Im Sinne dieser kategorientheoretischen Auffassung stellt der im 3. Abscnitt konstruierte Bereich die Lösung eines universellen Problems dar. Sei nämlich P ein beliebiger bedingter Halbverband mit kleinstem Element und $\mathrm{f} : \mathrm{P} \to \mathrm{D}$ eine monotone Abbildung in einen Scott-Ershov Bereich. Es existiert dann eine eindeutig bestimmte stetige Funktion $\bar{\mathrm{f}} : \bar{\mathrm{P}} \to \mathrm{D}$, so daß $\mathrm{f} = \bar{\mathrm{f}} \circ \imath$ und $\imath : \mathrm{P} \to \bar{\mathrm{P}}$ die kanonische Abbildung der Elemente von P auf die durch sie generierten Hauptideale ist. (Vgl. Stoltenberg-Hansen et al. (1994), Prop 3.25) Auf unseren Fall angewandt bedeutet dieses Resultat: Welche Lösung auch immer für eine bereichstheoretische Deutung der regulären Baummengen gefunden wird, sie faktorisiert über ihre ideale Vervollständigung. Für diese haben wir im vorangegangenen Abschnitt eine logische Präsentation angegeben, die sich damit als optimale Antwort auf die Frage nach einer bereichstheoretischen Deutung herausgestellt hat.

Bei der Diskussion der universellen Eigenschaft logisch präsentierter Bereiche sind wir implizit davon ausgegangen, daß die Grundlage der logischen Präsentation eine saturierte Struktur ist. Die Optimalität der

Antwort auf die Frage nach einer berechnungstheoretisch relevanten Deutung von Grammatikformalismen, die mit den Mitteln der schwachen monadischen Logik zweiter Stufe mit mehreren Nachfolgerfunktionen amgemessen präzisiert werden können, wäre daher erst endgültig nachgewiesen, wenn auch saturierte Strukturen den ausgezeichneten Status einer universellen Lösung hätten. Dies ist in der Tat der Fall für saturierte Modelle von Theorien, die mit den Mitteln dder Prädikatenlogik erster Stufe formalisiert sind. Seien nämlich M und M' zwei elementar äquivalente Modelle und M saturiert, dann läßt sich M' in M elementar einbetten. Da die Bereichskonstruktion sich auf mengentheoretische Techniken gestützt hat, ist dieses modelltheoretische Ergebnis nicht ohne weiteres auf unser Problem übertragbar. Erinnern wir uns daher noch einmal an die pünktliche" Definition der Erfüllbarkeit und erklären zwei Strukturen als *baumäquivalent*, wenn alle Sätze aus $MSOL_n(\Sigma)$, in denen die P_a $(a \in \Sigma)$ existentiell gebunden sind, in beiden Strukturen denselben Wahrheitswert annehmen. Seien M und M' zwei baumäquivalente Strukturen und M saturiert. Wir nehmen an, daß die "Bäume", d.h. die Belegungen aus M', aufgezählt werden können. Sei Γ_i die Menge aller Sätze in $MSOL_n(\Sigma)$ $(P^i_a : a \in \Sigma)$, d.h. in der Erweiterung von $MSOL_n(\Sigma)$ nun die monadischen Prädikationskonstanten P^i_a mit der Interpretation, die sie durch die i-te Belegung erhalten, welche in M' wahr sind. Nach Voraussetzung gibt es in M eine Belegung P^{*i}_a, die Γ_i realisiert. Unter dieser Entsprechung macht eine Belegung P eine Formel aus $MSOL_n(\Sigma)$ in M' genau dann wahr, wenn $P*$ diese Formel in M wahr macht. Damit ist die Universalität des saturierten Modells gegenüber einem baumäquivalenten Modell nachgewiesen. Da allein etikettierte Bäume zu dem intendierten Interpretationsbereich von $MSOL_n(\Sigma)$ gehören, läßt sich das Resultat der Bereichskonstruktion in der Weise charakterisieren, daß es zu den Baumfamilien, die die Typen eines saturierten Modells realisieren, keine Alternative gibt, wenn für logik-basierte Grammatikformalismen nach einer deklarativen Semantik gesucht wird, die eine formale Explikation des Berechnungsbegriffs darstellt.

Literatur

Chang, C.C. und H.J. Keisler (1990): *Model Theory*, Amsterdam.

Doner, J. (1970): Tree Acceptors and Some of Their Applications, *J. Comp. Syst. Sci. 4*, 406–451.

Engelking, R. (1977): *General Topology*, Warschau.

Frayne, T.E., A.C. Morel und D.S. Scott (1962): Reduced Direct Products, *Fundamenta Math. 51*, 195–228.

Goguen, J.A., J.W. Thatcher, E.G. Wagner und J.B. Wright (1977): Initial Algebra Semantics and Continuous Algebras, *J. Ass. Comp. Mach. 24*, 68–95.

Palmgren, E. und V. Stoltenberg-Hansen (1995): Logically Presented Domains, *Tenth Ann. IEEE Symp. Logic in Comp. Sci.*, 455–463.

Plotkin, G. (1983): *Domains*, Dept. of Comp. Sci., Univ. of Edinburgh.

Stoltenberg-Hansen, V., I. Lindström und E.R. Griffor (1994): *Mathematical Theory of Domains*, Cambridge.

Thatcher, J.W. und J.B. Wright (1968): Generalized Finite Automata Theory with an Application to a Decision Problem of Second Order Logic, *Math. Syst. Th. 2*, 57–81.

Universität Tübingen, SfS, Wilhelmstr. 113, D-72074 Tübingen

E-mail address: um@sfs.nphil.uni-tuebingen.de